Prof. Dr. Dr. Dieter Gernert
Institut für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Technische Universität München

Betriebswirtschaftliches Seminar im Wintersemester 1996/97
Rahmenthema: Automation, Robotik und betriebliche Auswirkungen

Fuzzy Logic

6. Februar 1997

Vortragender: Gerhard Müller (muellerg@informatik.tu-muenchen.de)

Leitung: Prof. Dr. Dieter Gernert

Dieses Dokument ist im Internet unter der URL
http://www.informatik.tu-muenchen.de/~muellerg/docs/FuzzyLogic/
verfügbar

Zusammenfassung

Dieser Text vermittelt einen Überblick sowohl über die mathematischen Grundlagen der Fuzzy Logic, als auch über deren praktische Anwendung. Es wird gezeigt, daß die Grundlage der Fuzzy Logic darin bestehen, graduelle Zugehörigkeiten zu Mengen zuzulassen. Mit diesem Ansatz lassen sich viele komplexe Systeme besser modellieren und deren Probleme lösen als mit herkömmlichen klassischen Methoden. Es werden verschiedene Anwendungen der Fuzzy-Theorie aufgezeigt, unter anderem das bisher wirtschaftlich erfolgreichste Anwendungsgebiet, die Fuzzy-Regelung, welche in vielen Bereichen die Automatisierung entweder erst ermöglicht, verbessert oder erheblich preiswerter werden läßt.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

"So far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain. And so far as they are certain, they do not refer to reality."
Albert Einstein
Geometry and Experience

1 Was ist Fuzzy Logic?

Der Begriff *Fuzzy Logic* ist seit Beginn der 90er Jahre in aller Munde. Trotzdem ist es den allerwenigsten klar, was sich hinter dem Begriff "fuzzy" (englisch: flaumig, faserig, 'fusselig'; kraus, struppig; undeutlich, verschwommen) verbirgt. Dieser Text hat als Ziel, Licht in das Dunkel zu bringen und sowohl über die Mathematik der Fuzzy Logic, als auch deren Anwendungen zu informieren.

Der Begriff "fuzzy" wurde 1965 von Lotfi A. Zadeh (Abbildung 1), einem amerikanischen Elektrotechnikprofessor an der Universität von Kalifornien in Berkeley, geprägt. Zadeh entwickelte eine neue Art, mit unscharfen Informationen umzugehen, um die Modellierung komplexer Systeme zu vereinfachen.

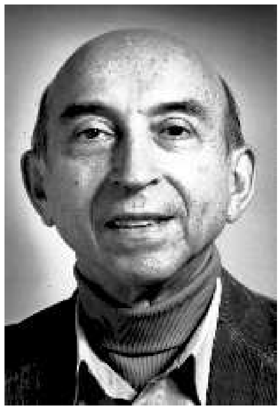

Abbildung 1: Lotfi A. Zadeh

Der Begriff "Fuzzy Logic" bezeichnet nicht (wie es der Begriff nahelegen würde) eine bestimmte mathematische Logik, sondern eine Theorie der "unscharfen Mengen". In deutschen Texten wird Fuzzy Logic daher eher mit "Fuzzy-Theorie" oder "Fuzzy-Systeme" übersetzt. Die mathematisch mehrwertige, "fuzzige" Logik im engeren Sinn gibt es jedoch auch, und wird in diesem Text zur Unterscheidung mit "Fuzzy-Logik" bezeichnet.

In der Wissenschaft oder in Computerprogrammen wird üblicherweise nur mit zwei Werten gearbeitet: wahr oder falsch, an oder aus, 1 oder 0. Zwischenwerte gibt es nicht. Diese binäre Darstellung vereinfacht die Mathematik und die Computerverarbeitung. Unser Zeitalter der Information beruht auf dieser digitalen Denk- und Arbeitsweise.

Der Hauptgedanke der Fuzzy Logic hingegen ist der Umgang mit unscharfen Mengen, also von Mengen, deren Elemente nur graduell zu einer Menge gehören. Statt nur "zugehörig" und "nicht zugehörig" werden auch Zwischenstufen zugelassen. Mit Hilfe der Fuzzy Logic können damit Unschärfen verschiedenster Art mathematisch beschrieben und gehandhabt werden.

Damit können Paradoxien vermieden werden, die ansonsten bei der Digitalisierung Probleme bereiten, z.B. "wieviele Sandkörner braucht man, um einen Haufen zu haben?" oder "ab wieviel Jahren bezeichnet man eine Person als alt?" oder "ab welcher Höhe ist ein Hügel ein Berg?". Diese Fragen machen uns in der Praxis üblicherweise keine Probleme, erst die genaue Festschreibung erzeugt merkwürdige Absurditäten. Fuzzy Logic hilft, diese Absurditäten zu vermeiden.

Richtig bekannt wurde Fuzzy Logic erst durch deren erfolgreiche industrielle Anwendungen, besonders aus Japan. Dort gibt es bereits mehr als 1500 erfolgreiche Anwendungen von Fuzzy Logic. Sehr bekannte Beispiele sind die U-Bahn in Sendai, und später die U-Bahn in Tokyo, die mit Hilfe von Fuzzy-Regelung eine sehr komfortables Anfahren und Abbremsen ermöglichen. Neben komplexen industriellen Regelungsaufgaben wird Fuzzy Logic jedoch auch in zunehmendem Maß in Konsumgütern eingesetzt. Beispiele sind Videokameras, die automatisch die leichten Wackelbewegungen von Menschen ausgleichen, Waschmaschinen, die sich automatisch auf den Verschmutzungsgrad der Wäsche einstellen, oder auch kleine Handheld-Computer, die Handschriften erkennen können. Es wird davon ausgegangen, daß im Jahre 2000 rund 5 Mrd. Dollar mit Fuzzy-Technologie umgesetzt werden.

1.1 Information und Komplexität

Die Fuzzy Logic wurde von Zadeh entwickelt, da er erkannt hatte, daß die bisherigen Methoden zur Erstellung komplexer Systeme (beschrieben mit Differentialgleichungen oder statistischen Methoden), die sowohl eine hohe Anzahl von relevanten Variablen bzw. Faktoren, als auch eine hohe Abhängigkeit zwischen diesen Faktoren besitzen, zu erheblichen Problemen führen. Aufgrund der steigenden Komplexität der von ihm beobachteten Systeme schrieb er (zitiert nach [Kruse 1995, Seite 66]):

> "... that the conventional quantitative technique of system analysis are intrinsically unsuited for dealing with humanistic systems or, for that matter, any system whose complexity is comparable to that of humanistic systems. The basis of this contention rests on what might be called the *principle of incompatibility*. Stated informally, the essence of this principle is that as the complexity of a system increases, our ability to make precise and yet significant statement about its behaviour diminishes until a threshold is reached beyond which precision and significance (or relevance) becomes almost mutually exclusive characteristics."

Die bei Fuzzy-Systemen verfolgte Strategie ist es, einen Anteil Präzision sowie Vagheit und Unsicherheit (verstanden als Unvollkommenheit) bei dem Modellierungsprozeß zu tolerieren. Durch das gezielte Verwenden dieser nicht perfekten Information kann man dann den Vorteil einer damit verbundenen Komplexitätsreduktion gegenüber der genauen Modellierung ausnutzen [Kruse 1996, Seite 4].

Dies kann anhand eines Beispiels aus dem täglichen Leben illustriert werden: beim rückwärts Einparken in einen engen Parkplatz mit Unterstützung eines Helfers sind die Anweisungen "noch ein bißchen weiter nach links" "wieder etwas nach vorne" "noch ein Stück zurück" üblich und hilfreich. Man stelle sich vor, der Helfer würde stattdessen sagen "12 Grad 3 Zoll nach links" "12,5 cm nach vorne" und "13,4 cm zurück" sagen; es ist offensichtlich, daß diese Art der Kommunikation, die vielleicht für technische Prozesse richtig und sinnvoll sein kann, für Menschen in diesem Zusammenhang nicht angemessen ist. Auch hier kann die Fuzzy-Logic helfen.

Natürlich ist es nicht wünschenswert, bei der Modellierung wichtige Eigenschaften der realen Welt zu ignorieren. Zu bedenken ist, daß die Güte eines Modells nicht von der Exaktheit der einfließenden Informationen abhängt. Für Modelle gibt es spezifizierbare Gütekriterien, wie z.B. Korrektheit, Vollständigkeit, Adäquatheit, Benutzerfreundlichkeit und Effizienz. Ein Modell, welches die Komplexitätsreduktion unscharfer Informationen nutzt, kann durchaus in Bezug auf verschiedene Gütekriterien objektiv besser sein als ein Modell, welches dadurch schwer handhabbar ist, da es generell nur "präzise" Informationen zuläßt.

1.2 Arten der Unsicherheit

Wie oben gezeigt, kann bei der Modellierung komplizierter Systeme Unsicherheit in Kauf genommen werden, um bessere Modelle zu erhalten. Folgende Arten von Unsicherheit sind dabei von Relevanz [Klir 1988]:

- *Vagheit* (vagueness)
  Unter Vagheit wird das Problem verstanden, nur unscharfe Entscheidungen treffen zu können, d.h. der Gegenstand von Interesse ist vage und kann nicht durch scharfe Grenzen klassifiziert werden.

- *Mehrdeutigkeit* (ambiguity) Die Mehrdeutigkeit hingegen stellt uns vor die Frage, welche von mehreren Entscheidungen die richtige ist.

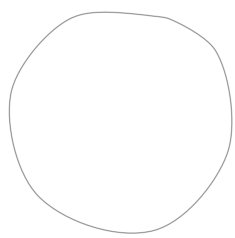

Abbildung 2: Ein "fuzziger" Kreis

Die Vagheit kann gut durch Bilder verdeutlicht werden: Abbildung 2 stellt uns nicht vor die Frage, ob wir es mit einem Kreis zu tun haben, sondern zu welchem Grad wir es mit einem Kreis zu tun haben, bzw. zu welchem Grad die Abbildung 2 einen Kreis repräsentiert. Daher haben wir es hier mit Vagheit zu tun. Ein typisches Zeichen für Vagheit ist, wenn es zu Aussagen "mehr oder weniger" kommt.

Ein Beispiel für Mehrdeutigkeit wäre, vor der Frage zu stehen, welche Lottozahlen morgen gezogen werden. Es gibt sicher eine eindeutige (scharfe) Antwort, aber diese ist unbekannt. Ein typisches Zeichen für Mehrdeutigkeit ist, wenn Menschen mit der Achsel zucken, da sie die richtige Antwort nicht kennen.

Andere Autoren teilen Unschärfe in andere Bereiche auf. So wird auch zwischen zufälliger Unsicherheit, lexikalischer (linguistischer) Unsicherheit und informationaler Unsicherheit unterschieden [Zimmermann 1993].

Wie wir später noch sehen werden, stellt Fuzzy Logic ein mathematisches Gerüst dar, um mit Vagheit umzugehen. Besonders oft wird in der Fuzzy Logic mit der *sprachlichen Unschärfe* von Wörtern wie warm, heiß, kalt, schnell, langsam, etc. umgegangen. Dies kommt den Menschen oft entgegen, da es mit Hilfe von Fuzzy Logic fast direkt möglich ist, Erfahrungen, die man mit Worten beschreiben kann, ohne aufwendige mathematische Modellierung durch Computer nutzbar zu machen. Damit sind wesentlich vereinfachte Schnittstellen zwischen Menschen und Computern denk- und realisierbar.

1.3 Wofür kann Fuzzy Logic gebraucht werden?

Der Einsatz von Fuzzy Logic ist überall dort sinnvoll, wo entweder unscharfe Informationen wie Sprache semantisch sinnvoll verarbeitet werden muß, oder komplexe Systeme in vernünftiger Zeit kostengünstig durch Modelle beschrieben werden sollen. Damit gibt es für die Fuzzy Logic eine Vielzahl von Einsatzgebieten. Die bisher erfolgreichsten Anwendungen kommen aus dem Bereich der Automatisierung, der Regelung. Daneben wird Fuzzy Logic aber auch in anderen Bereichen, wie z.B. bei Datenbanken, in der Medizin und bei Expertensystemen immer öfter sinnvoll eingesetzt.

1.4 Entwicklungsgeschichte der Fuzzy Logic

Zadeh stellte erstmalig die Fuzzy Logic 1965 in dem Artikel [Zadeh 1965] vor. Fuzzy Logic hatte alle Probleme, die ein Paradigmenwechsel in der Wissenschaft nur haben kann. Fuzzy Logic galt lange Zeit als unpräzise und wissenschaftlich unseriös. Erst nach über 20 Jahren ist Fuzzy Logic inzwischen als eine sinnvolle Bereicherung akzeptiert, und erfährt seit dem Beginn der 90er einen richtigen Boom. In der Wissenschaft führte die Fuzzy Logic ein regelrechtes Mauerblümchendasein; erst der Erfolg von industriellen Anwendungen öffnete der Fuzzy Logic den Zugang zu Universitäten. Besonders Japan kommt hier eine Vorreiterrolle zu, hier wurde gezeigt, daß sich Fuzzy Logic auch für Massenmarktprodukte einfach, kostengünstig und effizient einsetzen läßt.

Alles ist ungenau bis zu einem gewissen Grad, den man erst bemerkt, wenn man versucht hat, etwas genau zu machen.
Bertrand Russel
The Philosophy of Logical Atomism

2 Mathematik der Fuzzy-Mengen

Die Theorie unscharfer Mengen, der Fuzzy-Mengen, kann sowohl als eine Verallgemeinerung der klassischen Mengenlehre als auch als eine Verallgemeinerung der zweiwertigen (dualen) Logik angesehen werden [Zimmermann 1993]. Da die verallgemeinerten Mengentheorie leichter nachzuvollziehen ist als die Theorie der verallgemeinerten Logik, wird hier die Fuzzy Logic über die Fuzzy-Mengen eingeführt.
Cantor hatte Mengen wie folgt definiert [Mayer 1993, Seite 10]: eine Menge M ist eine Zusammenfassung von *wohlbestimmten und wohlunterschiedenen* Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen.
Die Theorie der Fuzzy-Mengen erweitert nun die Begriffe der klassischen Mengenlehre von Cantor mit den dort entwickelten Operationen (vgl. Abbildung 3). Die Wohlbestimmtheit und Wohlunterschiedenheit wird dabei aufgegeben.

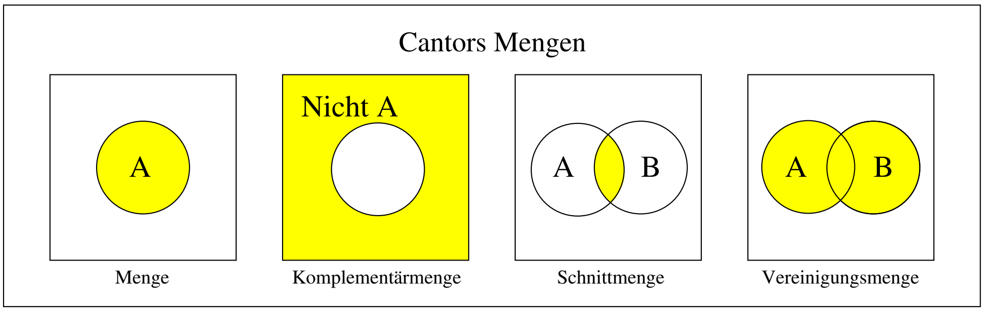

Abbildung 3: Grundlagen der klassischen Mengenlehre

2.1 Definitionen

In der bekannten Mengenlehre nach Cantor gehört ein Element entweder zu einer Menge, oder es gehört nicht dazu. Es gibt keine Zwischenwerte, die es Elementen erlauben, nur teilweise in einer Menge enthalten zu sein. Mathematisch kann also der Zugehörigkeitsgrad $\mu_M(x)$ eines Elementes e zu einer Menge M aus einem Universum U wie folgt beschrieben werden:

$$\mu_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad e \notin M \\ 1 & \text{für} \quad e \in M \end{cases}$$

Diese *charakteristische Funktion* "scharfer" Mengen (crisp set) kann verallgemeinert werden, so daß jedem Element aus der Universalmenge U ein Wert aus einem gewissen Intervall

(aus Einfachkeitsgründen üblicherweise $[0, 1]$) zugewiesen wird, der den Mitgliedschaftsgrad von den Elementen in einer Menge definiert. So eine Funktion wird auch als Mitglieds- oder Zugehörigkeitsfunktion bezeichnet. Diese kann wir folgt zur Definition von Fuzzy-Mengen benutzt werden:
Eine *Fuzzy-Menge* (fuzzy set) μ_F ist eine Abbildung von einem Universum U in das Einheitsintervall $[0, 1]$:

$$\mu_F : U \rightarrow [0, 1]$$

Die Fuzzy-Menge μ_F ordnet jedem Element $x \in U$ den Zugehörigkeitsgrad $\mu_F(x)$ aus dem Intervall $[0, 1]$ zu. Dabei bedeutet $\mu_F(x_1) = 0$, daß x_1 nicht zu μ_F gehört, $\mu_F(x_2) = \frac{1}{2}$, daß x_2 zur Hälfte zu μ_F gehört, und $\mu_F(x_3) = 1$, daß x_3 ganz zu μ_F gehört. In der Praxis werden Mitgliedsfunktion und Fuzzy-Menge synonym benutzt.

Es gibt mehrere Beschreibungsmöglichkeiten für Fuzzy-Mengen:

- Direkte *graphische Darstellung* durch Vorgabe einer Kennlinie $\mu_F(x)$ (Abbildung 4)

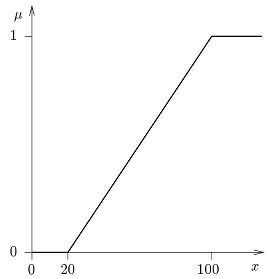

Abbildung 4: Darstellung einer Fuzzy-Menge mit Hilfe einer Kennlinie

- *Parametrische Darstellung* in Form analytischer Funktionen, die den Verlauf der Kennlinie als ganzes oder stückweise beschreiben, z.B.:

$$\mu_F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < 20 \\ \frac{x-20}{50} & \text{falls} \quad x \geq 20 \text{ und } x \leq 70 \\ 1 & \text{falls} \quad x > 70 \end{cases}$$

- Diskrete Darstellung durch Angabe *diskreter Wertepaare* (Element, Zugehörigkeitswert) z.B.

$$\mu_F = \{(0.1, 0.5), (0.3, 0.4), (3, 0.7), (4.8, 0.9)\}$$

  Diese natürlich nur bei endlicher Universalmenge sinnvolle Darstellungsart wird im Zusammenhang mit Fuzzy Logic oft wie folgt geschrieben:

$$\mu_F = 0.1/0.5 + 0.3/0.4 + 3/0.7 + 4.8/0.9$$

Fuzzy-Mengen können semantisch auf zwei verschiedene Arten interpretiert werden:

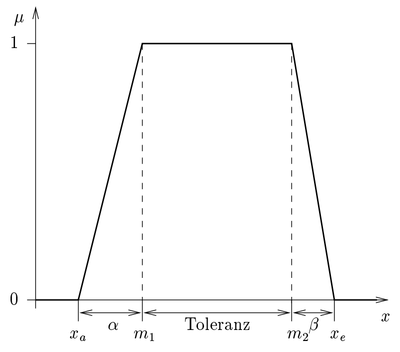

Abbildung 5: Trapezförmige Fuzzy-Menge

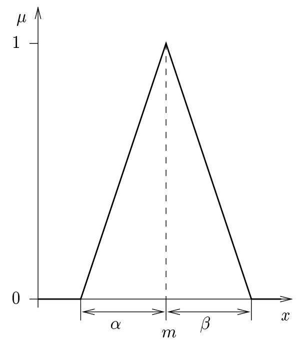

Abbildung 6: Dreiecksförmige Fuzzy-Menge

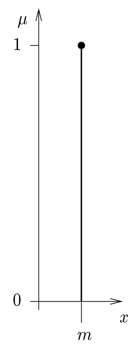

Abbildung 7: Ein diskretes Mitglied einer Fuzzy-Menge

- physikalische Interpretation: Fuzzy-Menge beschreibt ein vages Objekt.
  Beispiel: Grauwertbild einer Röntgenaufnahme
- epistemische Interpretation: Fuzzy-Menge beschreibt unscharfe Beobachtung eines scharfen Objektes.
  Beispiel: Konzept "fast exakt gleich x": Beschreibung der Umdrehungsgeschwindigkeit eines Motors durch einen Experten

Üblicherweise werden zur Beschreibung von Fuzzy-Mengen hauptsächlich Trapezfunktionen (Abbildung 5), da sie Ausdrücke wie "ungefähr zwischen m_1 und m_2 recht gut wiedergeben, Dreiecke (Abbildung 6) oder auch Glockenkurven, da sie Ausdrücke wie "etwa m" nahekommen, oder einzene Punkte für diskrete Fuzzy-Mengen (Abbildung 7). Trapeze, Dreiecke und einzelne Punkte werden wegen ihrer Einfachheit und mathematischen Eigenschaften besonders oft zur Beschreibung von Fuzzy-Mengen verwendet.
Zwei entscheidende Kenngrößen für Fuzzy-Mengen sind ihre *Einflußbreite* (= Support, Träger) und ihre *Toleranz*. Die *Einflußbreite* einer Fuzzy-Menge μ_F in der Universalmenge U ist die (scharfe) Menge aller Elemente von U, die einen positiven Mitgliedsgrad haben:

$$\text{supp}(x) = \{x|\mu_F(x) \geq 0\}$$

Die *Toleranz* toll beschreibt, in welchem Intervall $[m_1, m_2]$ der Zugehörigkeitsgrad gleich 1 ist, also

$$\text{toll}(\mu_A) = [m_1, m_2] = \{x|\mu_F(x) = 1\}$$

Der Einflußbereich von trapezförmigen Mengen ist nach Abbildung 5 also das Intervall $[m_1 - \alpha, m_2 + \beta]$, die Toleranz $[m_1, m_2]$.
Ist μ_F eine Fuzzy-Menge in U, so heißt

$$H(\mu_F) := \max\{\mu_F(x)|x \in F\}$$

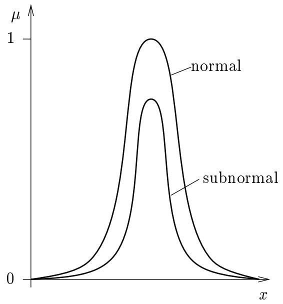

Abbildung 8: Normale und subnormale Fuzzy-Menge

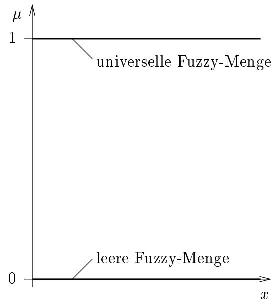

Abbildung 9: Leere und universelle Fuzzy-Menge

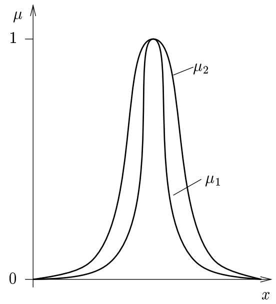

Abbildung 10: Fuzzy-Teilmenge

die *Höhe* von μ_F. μ_F heißt eine *normale* Fuzzy-Menge, wenn $H(\mu_F) = 1$ gilt, ansonsten *subnormal* (vgl. Abbildung 8).
Für den praktischen Einsatz der Fuzzy-Logic ist es wichtig, daß nur mit *normalen* Fuzzy-Mengen gearbeitet wird, da diese mathematische Vorteile besitzen.
Eine Fuzzy-Menge μ_F in U heißt *leer*, wenn

$$\mu_F(x) = 0 \text{ für alle } x \in U.$$

Eine Fuzzy-Menge μ_F in U heißt *universell*, wenn

$$\mu_F(x) = 1 \text{ für alle } x \in U.$$

Eine Fuzzy-Menge μ_1 heißt *Fuzzy-Teilmenge* einer Fuzzy-Menge μ_2 auf der Universalmenge U, wenn gilt

$$\mu_1(x) \leq \mu_2(x) \text{ für alle } x \in G$$

Schreibweise: $\mu_1 \subseteq \mu_2$

Eine Fuzzy-Menge kann nicht nur durch die oben beschriebenen *vertikalen* Darstellungsarten beschrieben werden, sondern auch durch alle ihre α-Schnitte, die im folgenden definiert werden. Es sei $\mu : U \to [0,1]$ eine Fuzzy-Menge auf der Grundmenge U und $\alpha \in]0,1]$. Dann heißt

$$[\mu_\alpha] : U \to [0,1] \text{ mit } \mu_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu(x) \leq \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

der *Schnitt der Fuzzy-Menge μ in der Höhe α* (vgl. Abbildung 11). α-Schnitte von Fuzzy-Mengen sind wieder klassische Mengen.
Diese Darstellungsart wird oft benutzt, wenn Fuzzy-Mengen in Computern modelliert werden sollen. Man beschränkt sich dabei auf eine sinnvolle Anzahl von α-Schnitten und speichert diese in normaler Form, z.B. als Intervalle ab. Abbildung 12 verdeutlicht dies.

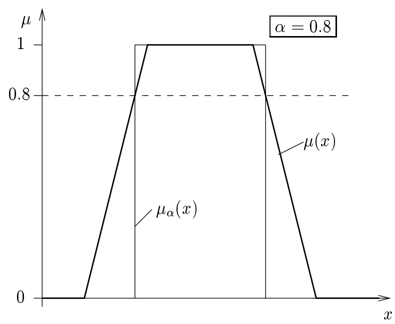

Abbildung 11: α-Schnitt einer trapezförmigen Fuzzy-Menge

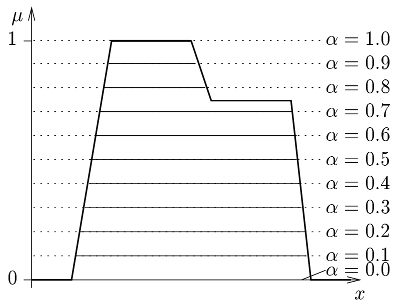

Abbildung 12: α-Schnitte eignen sich ebenfalls zu Definition von Fuzzy-Mengen

2.1.1 Verallgemeinerung von Fuzzy-Mengen

Eines der Hauptprobleme bei der Entwicklung von Fuzzy-Systemen ist die Wahl geeigneter Zugehörigkeitsfunktionen. Die Analyse von vielen Anwendungen hat gezeigt, daß es oft gar nicht auf exakte Werte in dem speziellen Intervall $[0,1]$ ankommt, sondern nur auf Größenordnungen.

In manchen Fällen kann es daher sinnvoll sein, anstatt des Intervalls $[0,1]$ einen beliebigen Verband[1] $(L, \sqcap, \sqcup)$ zu betrachten, der eine rein qualitative Anordnung der in L enthaltenen Zugehörigkeitsgrade zum Ausdruck bringt. Falls es z.B. eine totale Ordnung auf L gibt (z.B. unmöglich < unwahrscheinlich < kann sein < wahrscheinlich < sicher), also für alle $l, l' \in L$ gilt $l \leq l'$ oder $l > l'$, so ist $(L, \sqcap, \sqcup)$ durch

$$\begin{aligned} l \sqcap l' &= l \Longleftrightarrow l \leq l' \\ l \sqcup l' &= l \Longleftrightarrow l \geq l' \end{aligned}$$

definiert.

Diese Überlegung führt zu dem gegenüber Fuzzy-Mengen verallgemeinerten Begriff der L-Fuzzy-Menge. Zu beachten ist, daß Menschen nur zur Differenzierung von höchstens sieben

[1]Die Definition eines Verbandes ist im Anhang auf Seite 36

bis elf Zugehörigkeitsgraden im Stande sind.

Es sieht vielleicht problematisch oder sogar paradox aus, daß Repräsentation von Unschärfe durch Mitgliedsgrade geschieht, die ihrerseits wieder genaue Zahlen sind. Obwohl dies bei den meisten Anwendungen keine Probleme macht, kann man trotzdem das Prinzip der Fuzzy-Mengen verallgemeinern, um den Unterschied zwischen verschiedenen Mitgliedsgraden zu verwischen. Mengen dieser Art werden als Typ-2-Fuzzy-Mengen bezeichnet. Per Definition sind Typ-1-Fuzzy-Mengen normale Fuzzy-Mengen, während Typ-2-Fuzzy-Mengen Typ-1-Fuzzy-Mengen als Elemente auf einer Universalmenge besitzen. Auf diese Art können höhere Typen definiert werden. Alle Typ-2-Fuzzy-Mengen sind übrigens L-Fuzzy-Mengen.

Eine andere Art der Verallgemeinerung erhält man, wenn man Fuzzy-Mengen definiert, deren Elemente wiederum Fuzzy-Mengen sind. Diese Fuzzy-Mengen werden als *Level-k*-Fuzzy-Mengen bezeichnet, wobei k die Verschachtelungstiefe angibt. Beispiel für eine Level-2-Fuzzy-Menge wären ist die Sammlung von Attributen für ein neues Auto, wobei die Elemente der betrachteten Universalmenge normale (Level-1-) Fuzzy-Mengen wie *billig*, *zuverlässig* oder *sportlich* sind.

2.2 Verknüpfungen von Fuzzy-Mengen

Die grundlegenden Verknüpfungen der klassischen Mengenlehre (Durchschnitt $\cap$, Vereinigung $\cup$, Komplement $^{-}$) sollen nun auch in geeigneter Weise für Fuzzy-Mengen A und B eingeführt werden. Von Zadeh wurden für die Modellierung der Operatoren $^{-}$, $\cup$ und $\cap$ folgende Funktionen vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{A}}(x) &= 1 - \mu_A(x) && (1) \\ \mu_{A\cup B}(x) &= \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] && (2) \\ \mu_{A\cap B}(x) &= \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] && (3) \end{aligned}$$

Wenn das Ergebnis der Mitgliedsfunktion von A und B auf die scharfe Menge $\{0, 1\}$ beschränkt wird, entsprechen diese Operatoren genau denen bei scharfen Mengen. Damit stellen diese Operatoren eine Verallgemeinerung des üblichen Komplements, Durchschnitts und Vereinigung dar. Diese Operatoren sind jedoch nicht die einzig denkbaren. Für jeden der drei Operatoren wurden verschiedene Operatoren vorgeschlagen. Diese Operatoren müssen gewissen Axiomen genügen, damit die Operatoren sinnvoll sind.

2.2.1 Fuzzy-Komplement

Das Komplement einer Fuzzy-Menge A ist allgemein definiert durch eine Funktion

$$c : [0, 1] \to [0, 1]$$

welche jedem Zugehörigkeitswert $\mu_A(x)$ einen Wert $c(\mu_A(x))$ zuordnet. Dieser Wert wird interpretiert als der Zugehörigkeitsgrad von dem Element x in der Fuzzy-Menge, welche die Negation des Konzeptes der Fuzzy-Menge A repräsentiert. Wenn also z.B. A die Fuzzy-Menge aller großen Männer ist, ist das Komplement die Fuzzy-Menge aller Männer, die nicht groß sind. Offensichtlich gibt es viele Elemente, die sowohl einen positiven Zugehörigkeitsgrad sowohl in sowohl ihrer Fuzzy-Menge, als auch in ihrem Komplement haben. Zum Vergleich: dies ist in der klassischen Mengenlehre nicht möglich: entweder ist $\mu_A(x) = 1$, oder $c(\mu_A(x)) = 1$, eine andere Möglichkeit gibt es nicht.

Eine Funktion, die als Fuzzy-Komplement dienen soll, muß die Eigenschaften haben, sich am Rand bei 0 und 1 so verhalten wie das klassische Komplement, also $c(0) = 1$ und $c(1) = 0$. Desweiteren sollte die Funktion monoton fallend sein, da sonst ein größerer Eingabewert zu einem größeren Komplement führen würde, was der Vorstellung eines Komplementes widerspricht. Weiterhin ist oft wünschenswert (wenn auch nicht immer notwendig), daß die Funktion kontinuierlich definiert ist (keine Sprünge hat), sowie daß das Komplement des Komplements wieder der Ausgangswert ist (die Funktion muß involutorisch sein). Lediglich die in Gleichung 1 angegebene Funktion erfüllt alle diese Forderungen.
Ein Beispiel für das Komplement einer Fuzzy-Menge ist in Abbildung 13 gegeben.
Ein wichtiges Charakteristikum für das Komplement ist, wo eine Fuzzy-Menge F seinem Komplement $\overline{F}$entspricht: wo ist $F = \overline{F}$. Bei der Standarddefiniton ist dies bei $\frac{1}{2}$ der Fall. Man sieht also, daß sich scheinbare Widersprüche wie "ist das Glas halb voll oder halb leer?" sich in der Fuzzy-Theorie in Wohlgefallen auflösen: beide sind (wie auch intuitiv klar ist) identisch!

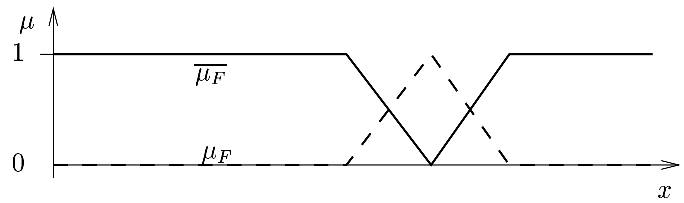

Abbildung 13: Das Komplement einer Fuzzy-Menge

2.2.2 Fuzzy-Durchschnitt

Sowohl der Schnitt als auch die Vereinigung zweier Mengen kann für Fuzzy-Mengen verallgemeinert werden. Die entsprechenden Operatoren bilden zwei Fuzzy-Mengen auf eine Fuzzy-Menge ab:

$$\cup, \cap : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$$

Für die Modellierung des Durchschnittes wird üblicherweise die *Minimumsfunktion* verwendet. Abbildung 14 verdeutlicht den Schnitt zweier Fuzzy-Mengen mittels der Minimumsfunktion.

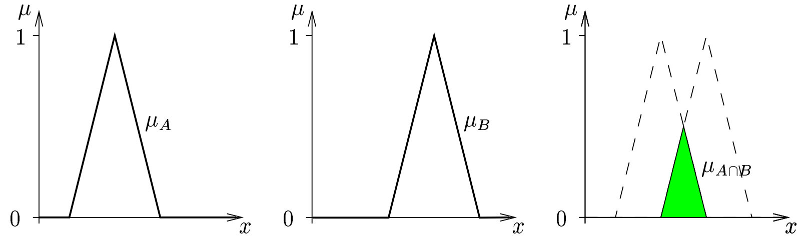

Abbildung 14: Fuzzy-Schnittmengenbildung zweier Fuzzy-Mengen mit der Minimumfunktion

Jede Funktion, die als Schnittmengenoperator dienen soll, muß verschiedene Eigenschaften haben: sie muß monoton, kommutativ und assoziativ sein, und außerdem muß der Schnitt einer (Fuzzy-)Menge mit der Gesamtmenge wieder die Ausgangsmenge ergeben. In der Mathematik wird eine Funktion, die diesen Bedingungen genügt, t-Norm (triangular, Dreiecks-Norm) genannt.

2.2.3 Fuzzy-Vereinigung

Die Vereinigung zweier Mengen wird analog zur Fuzzy-Schnittmenge eingeführt. Statt der Minimumfunktion wird hier jedoch üblicherweise die *Maximumsfunktion* verwendet. Abbildung 15 verdeutlicht die Vereinigung zweier Mengen mittels der Maximumsfunktion.

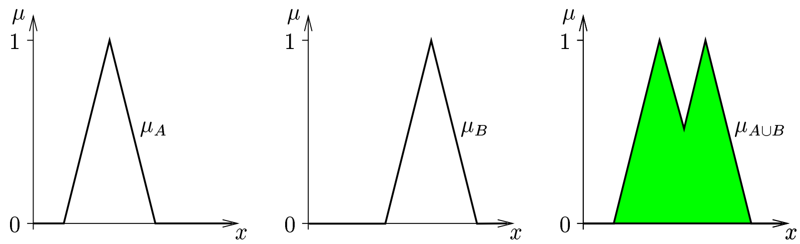

Abbildung 15: Fuzzy-Vereinigungsbildung zweier Fuzzy-Mengen mit der Maximumsfunktion

Verallgemeinert kann jede Funktion als Fuzzy-Vereinigungsoperator verwendet werden, die den Bedingungen einer t-Norm entspricht, jedoch muß die Vereinigung einer (Fuzzy-)Menge mit der leeren Menge wieder die Ausgangsmenge ergeben. Mathematisch spricht man hier von einer t-Conorm. Leicht zu sehen ist, daß jede t-Norm in eine entsprechende t-Conorm überführt werden kann: t-Conorm(a,b) = 1−t-Norm(a,b).

2.2.4 Fuzzy-Modifikatoren

Fuzzy-Mengen können mit Hilfe von verschiedenen Modifikatoroperationen verändert werden, um zum Beispiel Begriffe wie sehr, ziemlich und etwas zu modellieren. Üblich sind hier der Konzentrationsoperator, der für eine "schärfer" werden läßt, der Dilationsoperator, der eine Fuzzy-Menge "unschärfer" werden läßt, der Kontrastintensivierungsoperator, oder der

Verschiebungsoperator, der eine Fuzzy-Menge nach "links" oder "rechts" verschiebt. Abbildung 16 verdeutlicht die Wirkungsweise verschiedener Fuzzy-Modifikatoren.

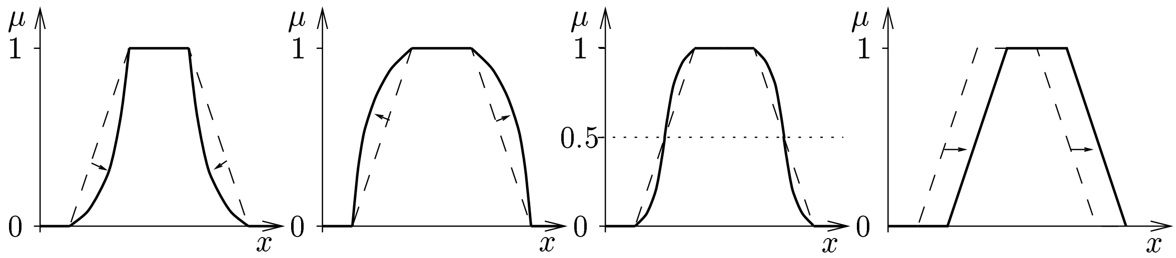

Abbildung 16: Wirkungsweise des Konzentrations-, Dilations-, Kontrastintensivierungs- und Verschiebungsoperators

2.3 Fuzzy-Relationen

Eine Relation R ist allgemein eine Teilmenge aus dem Kreuzprodukt $G_1 \times G_2 \ldots \times G_n$ mehrerer Grundmengen $G_1, \ldots, G_n$, formal

$$R \subseteq G_1 \times G_2 \ldots \times G_n$$

Der Begriff der Relation läßt sich auf Fuzzy-Relationen verallgemeinern. Dabei geht man auch hier von einer Universalmenge U auf das Kreuzprodukt mehrerer (nicht notwendigerweise verschiedener) Universalmengen $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ über. Eine n-stellige *Fuzzy-Relation* μ_R ist dann eine Abbildung

$$\mu_R : U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \to [0, 1],$$

die jedem Tupel $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in U_1 \times \ldots \times \in U_n$ wieder einen Zugehörigkeitswert im Intervall $[0, 1]$ zuordnet.

Ein Beispiel (nach [Zimmermann 1993, Seite 14]):
$U_1 = U_2$ sei eine Menge von Personen $\{$Anton, Bernd, Cäsar, Dagobert$\}$ und μ_R die unscharfe Relation "größer als". Dabei ist Anton 1,90m groß, Bernd 1,75m, Cäsar 1,65m und Dagobert 1,85m. Die Fuzzy-Relation könnte folgendermaßen definiert sein:

$$\mu_R(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & \text{für} & u \leq v \\ \frac{u-v}{0.1v} & \text{für} & v \leq u \leq 1.1v \\ 1 & \text{für} & u \geq 1.1v \end{pmatrix}$$

Die Zugehörigkeitsfunktion einer diskreten Fuzzy-Relation "u größer als v" kann in Matrixform wie folgt dargestellt werden:

$u \backslash v$	Anton	Bernd	Cäsar	Dagobert
Anton	0	0.857	1	0.27
Bernd	0	0	0.606	0
Cäsar	0	0	0	0
Dagobert	0	0.571	1	0

Interessant an Fuzzy-Relationen ist, daß diese gut benutzt werden können, um WENN... DANN... Regeln zu beschreiben (vgl. Abschnitt 3.4, Seite 20).

2.4 Linguistische Variablen und Terme

Linguistische Variablen sind eine spezielle Form von unscharfen Mengen. Die Werte bzw. Ausprägungen sind im Gegensatz zu numerischen Variablen nicht Zahlen, sondern Wörter oder Ausdrücke. Sie dienen dazu, sprachlich ausgedrücktes Wissen mit all seinen Unschärfen angemessen so zu modellieren, daß dabei möglichst wenig des Reichtums der menschlichen Sprache verloren geht, auf der anderen Seite jedoch das Wissen mit dem Computer verarbeitet werden kann. Mit dem Konzept der linguistischen Variablen ist es dann möglich, komplexe Systeme zu beschreiben, die mittels genauer mathematischer Modelle nicht in den Griff zu bekommen sind. Die in unserer Sprache enthaltene Unschärfe läßt sich gut durch linguistische Variable modellieren, deren einzelne Ausprägungen durch Fuzzy-Mengen repräsentiert werden. Beispiel: die linguistische Variable “Badewassertemperatur” läßt sich gut durch die fünf verbalen Terme “kalt”, “kühl”, “angenehm”, “warm” und “heiß” charakterisieren. Eine stärkere Differenzierung ist oft möglich und sinnvoll. Üblich sind fünf bis zehn linguistische Terme pro linguistischer Variable (vgl. Abbildung 17).

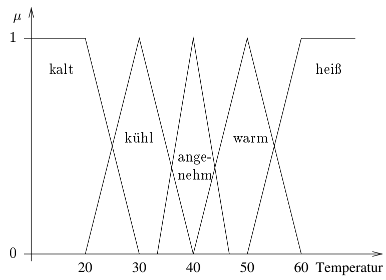

Abbildung 17: Badewasser als linguistische Variable, modelliert mit fünf linguistischen Termen

3 Fuzzy-Inferenz

In der Logik wird der Wahrheitswert von Aussagen betrachtet. Beispiele für elementare Aussagen wären z.B. “die Straße ist naß” oder “es regnet”. Wenn Aussagen wahr sind, erhalten sie den Wahrheitswert wahr (=1), und falsch (=0), wenn sie nicht wahr sind. Elementare Aussagen können mittels Operatoren verknüpft werden. Interessant

ist nun, welchen Wahrheitswert eine so zusammengesetzte Aussage hat. Übliche Verknüpfungsoperatoren sind z.B. $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$. Gegeben seien zwei Aussagen, A und B. A $\vee$ B ist wahr, wenn A wahr ist, B wahr ist, oder beide wahr sind, ansonsten falsch. A $\wedge$ B ist nur dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind. $\neg A$ ist wahr, wenn A falsch ist, und falsch, wenn A wahr ist. A $\Rightarrow$ B ist wahr, wenn A und B wahr sind, oder wenn A falsch ist.
Wichtig in der Praxis ist die sogenannte *Inferenz*, wo aufgrund gemachter Beobachtungen und eingespeicherten Wissens Schlüsse gezogen werden. Üblich ist bei der Wissensdarstellung die sogenannte "regelbasierte" Wissensverarbeitung.
Eine Art der Wissensrepräsentation und des Schlußverhaltens ist der *Modus Ponens* aus der klassischen Logik:

Regel:	Wenn A wahr ist, dann ist B wahr
Faktum (Beobachtung):	A ist wahr
Schluß:	B ist wahr

Hier werden zahlreiche Annahmen gemacht:

1. Es stehen sowohl für die Elementaraussagen als auch für die zusammengesetzten Aussagen nur die Wahrheitswerte "wahr" und "falsch" zur Verfügung.

2. Die Elementaraussagen A und B sowie die Regel müssen scharf definierte und deterministische Aussagen sein.

3. Die Beobachtung (hier also A) und die erste Komponente der Regel müssen genau übereinstimmen

4. Es werden der All-Quantor ($\forall$) und der Existenz-Quantor ($\exists$) angewendet.

Keine dieser Annahmen ist sonderlich realitätsbezogen. Wenn die vier Annahmen abgeschwächt werden, kann man zwischen der *Fuzzy-Logik* im engeren Sinne, dem *Approximativem Schließen* und dem *Plausiblen Schließen* unterscheiden.

3.1 Fuzzy-Logik

Hier werden nun die Wahrheitswerte nicht mehr nur auf 1(=wahr) und 0(=falsch) beschränkt, sondern sie werden auf das Intervall [0,1] verallgemeinert. Zur Modellierung von $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ werden analog zur Theorie der Fuzzy-Mengen üblicherweise die Funktionen min, max und 1-μ verwendet. Wie schon angesprochen, kann sogar gezeigt werden, daß die Fuzzy-Logik äquivalent zur Theorie der Fuzzy-Mengen ist. Dies wird durch Tabelle 1 motiviert.

3.2 Approximatives Schließen

Beim approximativen Schließen (approximate reasoning) können Aussagen nun auch Aussagen unscharfe Komponenten, also linguistische Variable, Fuzzy-Relationen und unscharfe

Mengenalgebra	Aussagenalgebra	übliche mathematische Beschreibung
Mengenvariable	Aussagevariable	
Durchschnitt $\cap$	Konjunktion $\wedge$	Minimum min
Vereinigung $\cup$	Disjunktion $\vee$	Maximum max
Komplement $^{-}$	Negation $\neg$	$1 - \mu(x)$
Leere Menge $\emptyset$	Kontradiktion	
Grundmenge E	Tautologie	
Teilmengenrelation $A \subseteq B$	Implikationsaussage $A \rightarrow B$	
Gleichheitsrelation $A = B$	Äquivalenzaussage $A \Leftrightarrow B$	

Tabelle 1: Gegenüberstellung von Mengenalgebra und Aussagenalgebra

Quantoren, enthalten. Die Schlußfolgerungen werden dementsprechend auch unscharf. Beibehalten wird allerdings die Forderung nach Identität zwischen Komponenten der Regeln und der Beobachtung.

3.3 Plausibles Schließen

Das plausible Schließen (plausible reasoning) ist die am stärksten verallgemeinerte Form des Modus Ponens. Zusätzlich wird nun auf die Identität zwischen Komponenten der Regeln und der Beobachtung verzichtet. Die Identität wird dabei durch *Ähnlichkeit* ersetzt. Dabei umfaßt der Begriff "Ähnlichkeit" den gesamten Bereich zwischen "Identität" und "Gegenteil".
Der Modus Ponens hat nun also für unscharfe Aussagen A, A', B, B' die Form

Regel:	WENN x = A, DANN ist y = B
Faktum (Beobachtung):	x = A'
Schluß:	y = B'

wobei A und A', als auch B und B' in geeigneter Weise als "ähnlich" definiert sein müssen.

3.4 Inferenzverfahren

Im vorherigen Abschnitt wurde die Repräsentation von Wissen (die Regel), und die Inferenz (die Schlußweise) eingeführt. Die Regel "WENN A, DANN B" wird nun verkürzt als A $\rightarrow$ B geschrieben. Dabei wird "$\rightarrow$" als Implikation bezeichnet. Wenn nun mit formalen Methoden Schlüsse gezogen werden sollen, muß "WENN x, DANN y" inhaltlich eindeutig festgelegt sein. Auch hier gibt es wieder mehrere Möglichkeiten zur Definition.
Der generelle Vorgang bei der Bildung des Standard-Fuzzy-Inferenzschemas besteht aus vier Schritten, wobei A_i, $i \in$N hier als Eingangsvariablen und B_i als Ausgangsvariablen bezeichnet werden:

1. *Fuzzifizierung*: die Mitgliedsfunktionen werden auf die aktuellen Werte der Eingangsvariablen angewendet, um den Wahrheitsgehalt von jedem Faktum zu bestimmen.

2. *Inferenz*: der Wahrheitsgehalt für das Faktum von jeder Regel wird berechnet, und auf den Schluß von jeder Regel angewendet. Dies ergibt je eine Fuzzy-Menge pro Ausgangsvariable und Regel. Üblicherweise werden die Funktionen $\min(\cdot,\cdot)$ oder $\mathrm{prod}(\cdot,\cdot)$ als Inferenzregeln angewendet. Bei der Verwendung der Minimumsfunktion wird die Fuzzy-Menge der Ausgangsvariablen in der Höhe des Wahrheitsgehaltes des Faktums abgeschnitten. Bei der prod-Funktion wird die Mitgliedsfunktion der Ausgangsvariablen mit dem Erfüllungsgrad des Faktums multipliziert (skaliert).

3. *Komposition*: alle Ergebnisse der Inferenz pro Ausgangsvariablen werden derart kombiniert, daß sie eine gemeinsame Fuzzy-Menge bilden. Hier werden üblicherweise die Maximumsfunktion verwendet, oder die Summe aller Fuzzy-Mengen pro Ausgangsvariablen wird gebildet.

4. *Defuzzifizierung:* in diesem optionalen Schritt (je nach Anwendungsgebiet) werden die Fuzzy-Mengen für jede Ausgangsvariable zu einer (üblicherweise rationalen) Zahl umgewandelt. Hierfür wurden verschiedene Funktionen vorgeschlagen. Üblich sind:
   - Schwerpunktmethode: der Flächenschwerpunkt der Fuzzy-Menge aus Schritt 3 wird als Ergebnis genommen. Das Ergebnis ist oft gut zu gebrauchen, leider ist die Berechnung recht aufwendig.
   - Maximumsmethode: der maximale Wert des Ergebnisses aus Schritt 3 wird verwendet. Das Maximum ist leicht zu berechnen, führt jedoch seltener als die Schwerpunktmethode zu sinnvollen Ergebnissen.

Die Inferenzart, bei der in Schritt 2 die Minumumsfunktion und Schritt 3 die Maximumsfunktion verwendet wird, wird auch als Max-Min-Inferenz bezeichnet. Ein detaillierteres Beispiel zur Inferenz wird im Abschnitt über Fuzzy-Regelung, Seite 24, besprochen.

4 Anwendungen der Fuzzy Logic

4.1 Überblick

Die meisten industriellen Anwendungen wurden im Bereich der Fuzzy-Regelung (auf diese wird weiter unten noch intensiv eingegangen) und der Fuzzy-Expertensysteme entwickelt. Andere industrielle Anwendungsgebiete für Fuzzy-Systeme sind z.B. [Kruse 1995, Seite 68]:

- Fuzzy-Datenanalyse
- Fuzzy-Bildverarbeitung
- Fuzzy-Informations-Retrieval

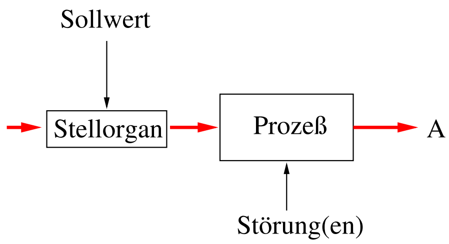

Abbildung 18: Das Prinzip der Steuerung

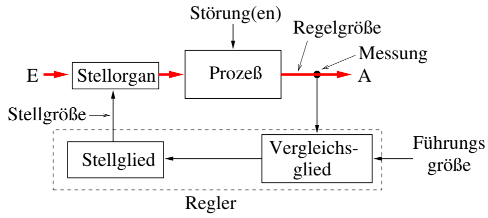

Abbildung 19: Das Prinzip der Regelung

- Fuzzy-Datenbanken
- entscheidungsunterstützende Systeme

4.2 Fuzzy-Regelungssysteme

Die größten Erfolge im Bereich industrieller und kommerzieller Anwendungen von Fuzzy-Systemen wurden bisher durch *Fuzzy-Regler* (engl.: Fuzzy Controller) erzielt [Kruse 1995].

4.2.1 Klassische Regelungssysteme

Wichtig ist der umgangssprachlich oft nicht beachtete Unterschied zwischen einer Regelung und einer Steuerung. Allgemein bedeutet *Steuerung* Größen durch andere, davon unabhängige, Größen zu beeinflussen. Steuervorgänge werden vor allem dort angewendet, wo auftretende Störgrößen einen konstanten, bekannten, oder nur geringen Einfluß auf die Regelgröße haben. Der Nachteil einer Steuerung liegt darin, daß das effektive Ergebnis der Steuerung nicht überwacht wird und damit keine Kontrolle stattfindet.
Genau dieses unterscheidet die Regelung von der Steuerung: bei der *Regelung* wird der Istwert einer Ausgangsgröße ständig gemessen und mit einer Führungsgröße (dem Sollwert) verglichen. Eine Differenz bewirkt eine angemessene Änderung der Eingangsgröße derart, daß der Differenz entgegengewirkt wird. Die Ausgangsgröße beeinflußt also die Eingangsgröße.
Das Prinzip der Steuerung und Regelung ist graphisch dargestellt in den Abbildungen 18 und 19.

4.2.2 Struktur von Fuzzy-Regelungssystemen

Wie bei einem konventionellen Regler transformiert ein Fuzzy-Regler Eingangsgrößen (Sensormessungen) in Ausgangsgrößen, die auf den Prozeß bzw. die Regelstrecke wirken. Von außen betrachtet weist der Regler dabei keine "Unschärfe" auf. Die für Fuzzy-Systeme typische Unschärfe wird im Innenbereich des Reglers benutzt.

Bei der Erstellung eines Fuzzy-Regelungssystemes wird folgendermaßen vorgegangen (vgl. [Kahlert 1994, S. 169 und 175]):

1. Wahl der Meßgrößen und der daraus abgeleiteten Größen (Änderung, etc.) als Eingangsgrößen des Fuzzy-Reglers sowie die Stellgröße als Ausgangsgröße,
2. Festlegung der möglichen Wertebereiche für Ein- und Ausgangsgrößen (Skalierung der linguistischen Variablen),
3. Definition der linguistischen Terme und ihrer Zugehörigkeitsfunktionen (Fuzzy-Mengen) für sämtliche linguistischen Variablen,
4. Aufstellen der Regelbasis aufgrund von
    - Experteninterviews
    - Heuristiken
    - Nachbildung bzw. Verallgemeinerung klassischer Regelstrategien
    - Entwurf spezieller Fuzzy-Controller-Typen
5. Testen des zugehörigen Regelkreises und ggf. Anpassung der Parameter

Jeder Fuzzy-Regler besteht aus drei verschiedenen Komponenten (vgl. Abbildung 20):

- Fuzzifizierungseinheit
- Inferenzeinheit
- Defuzzifizierungseinheit

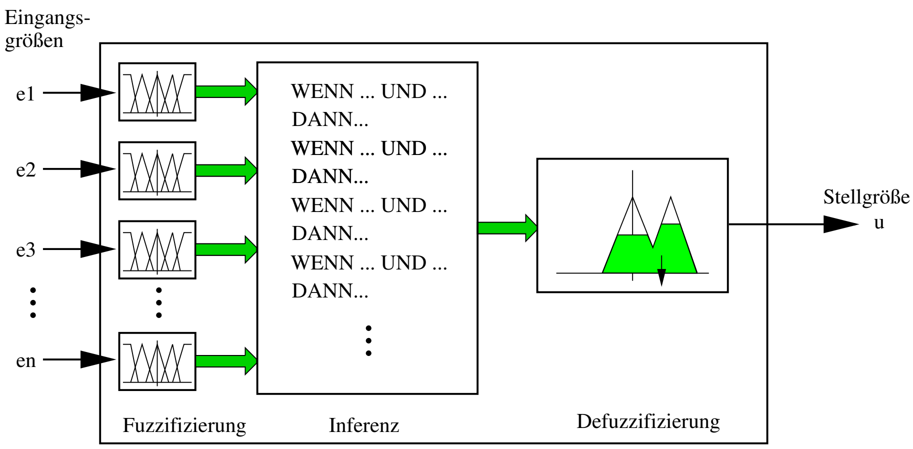

Abbildung 20: Logische Struktur eines Fuzzy-Reglers mit mehreren Eingangsgrößen und einer Ausgangsgröße

Die Eingangssignale werden dabei erst einmal "fuzzifiziert", es wird also zu jedem Eingangssignal der entsprechende Zugehörigkeitswert, also die entsprechenden Fuzzy-Mengen festgestellt. Diese Fuzzy-Mengen dienen dann als Eingabe für die Inferenzeinheit. In der Inferenzeinheit werden die einprogrammierten Regeln verwendet, um für jede Fuzzy-Menge zu bestimmen, in welchem Ausmaß sie zutrifft. Die Ergebnisse der verschiedenen Regeln werden dann in geeigneter Weise kombiniert, um aus den Ergebnissen der Inferenz ein scharfen Ausgangswert zu erzeugen. Dieser Schritt wird "Defuzzifizierung" genannt. Die einzelnen Schritte werden weiter unten noch ausführlicher erklärt.

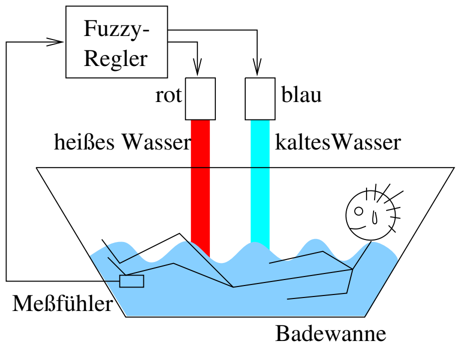

Abbildung 21: Badewannensystem

Als Beispiel soll ein Fuzzy-Regler konstruiert werden, der abhängig von der Badewassertemperatur den Zufluß neuen Wassers so regeln soll, daß das Badewasser immer eine möglichst angenehme Temperatur hat (Fortführung des Beispieles aus 2.4). Dazu stehen zwei Wasserleitungen ("rot" und "blau") zur Verfügung, die in ihrer Zuflußstärke gesteuert werden können (vgl. Abbildung 21).
Die Meßgröße (Eingangsgröße) ist die Temperatur eines in der Badewanne befestigten Meßfühlers. Die Öffnung der Ventile (zwischen offen und geschlossen) des roten und blauen Wasserstroms ist die zu regelnde Ausgangsgröße. Die linguistische Variable "Badewassertemperatur" wird mit dem Satz linguistischer Terme "kalt", "kühl" "angenehm", "warm", "heiß" modelliert. (vgl. Abbildung 17). Die linguistische Variable "Temperaturzufuhr_blau" (analog rot) wird mit dem Satz linguistischer Terme "stark", "mittel" und "aus" modelliert . (Abbildung 22).

4.2.3 Fuzzifizierung

Die Fuzzifizierung führt die den scharfen Meßwert der Temperatur in einen Vektor von Zugehörigkeitsgraden der linguistischen Variablen "Badewassertemperatur" über. Wenn wir einen Meßwert von 56 Grad annehmen (Abbildung 23), so ist die Fuzzy-Menge "warm" 0.31 erfüllt, und "heiß" 0.675. Das Wasser ist mit 56 Grad also zwischen warm und heiß, und zwar eher heiß. Der scharfe Wert 56 Grad wird zu einem Vektor (0.0, 0.0, 0.0, 0.31, 0.675) der Fuzzy-Variablen "Badewassertemperatur" (kalt, kühl, angenehm, warm, heiß).

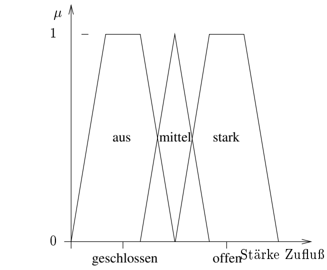

Abbildung 22: Die Modellierung der linguistischen Variable "Temperaturzufuhr_blau" und "-rot"

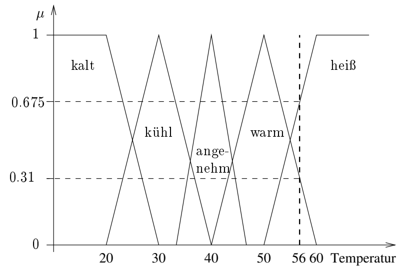

Abbildung 23: Fuzzifizierung des Temperaturwertes 56 Grad

4.2.4 Regelbearbeitung

Um die Temperatur des neu zugeführten Wassers abhängig von der aktuellen Temperatur zu machen, sind Regeln nötig, wie z.B.:

1. WENN Badewassertemperatur = "heiß", DANN Temperaturzufuhr_blau = "stark", Temperaturzufuhr_rot = "aus"
2. WENN Badewassertemperatur = "warm", DANN Temperaturzufuhr_blau = "mittel", Temperaturzufuhr_rot = "aus"
3. WENN Badewassertemperatur = "kühl", DANN Temperaturzufuhr_blau = "aus", Temperaturzufuhr_rot = "mittel"
4. WENN Badewassertemperatur = "kalt", DANN Temperaturzufuhr_blau = "aus", Temperaturzufuhr_rot = "stark"

Nun wollen wir testen, in welchem Grad die Regeln betroffen sind. Wir gehen dazu alle Regeln der Reihe nach durch. Wir stellen fest, daß alle Regeln bearbeitet werden müssen. Die Bedingung in Regel 1 ist nur zu 0.675 erfüllt, dementsprechend wird das Ergebnis Temperaturzufuhr_blau entsprechend gekürzt: wir schneiden die Fuzzy-Menge "heiß" der linguistischen Variablen Temperaturzufuhr_blau der Höhe 0.675 ab. Wir verfahren analog mit Regel 2. Das Ergebnis ist in Abbildung 24 zu sehen. Die Ergebnisse müssen jetzt noch kombiniert werden, hier nehmen wir jeweils das Maximum und erhalten die Fuzzy-Menge in Abbildung 25. Für die Temperaturzufuhr_rot erhalten wir die Fuzzy-Menge "aus" in der Höhe 0.675, dem Maximum von 0.675 und 0.31.

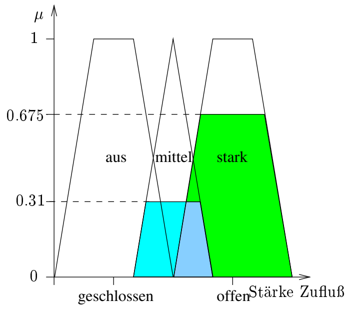

Abbildung 24: Ergebnis der Inferenz: Ausgangsvariable Temperatur_blau

4.2.5 Defuzzifizierung

Die Fuzzy-Menge aus Abbildung 24 muß nun noch in einen scharfen Wert umgewandelt werden. Wie oben schon erwähnt, wird üblicherweise der Schwerpunkt der Fläche bestimmt, dieser dann auf die x-Achse projeziert, und der sich ergebende Wert wird dann als Ausgangswert benutzt. Für die Ausgangsvariable "roter Ventil" ergibt sich "aus" (der Schwerpunkt ist direkt über "geschlossen"), für das "blaue Ventil" nach Abbildung 25 ein Öffnungsgrad des Ventils von ungefähr 86%.

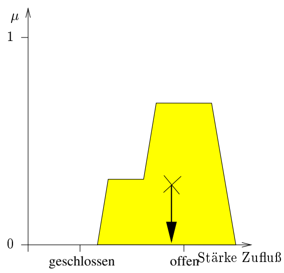

Abbildung 25: Defuzzifizierung der linguistischen Variablen Temperaturzufuhr_blau

4.2.6 Vorteile und Nachteile gegenüber anderen Reglertypen

Die Vorteile von Fuzzy-Reglern sind, daß diese eine recht schnelle, realistische, problembezogene, aussagekräftigere Modellierung auch komplexer Systeme mit nichtlinearem Verhalten ermöglichen. Dabei ist die Beschreibung und das Verhalten eines Systems mit linguistischen Ausdrücken möglich, was wesentlich einfacher ist als durch mathematische Beschreibungsverfahren. Ebenfalls angenehm ist die gute Wartbarkeit: falls die Regelung in einem Bereich nicht gut ist, werden entsprechende Regeln ergänzt oder verändert, bzw.

die Definition der Fuzzy-Mengen verändert. Als positiv erweist sich häufig die gute Nachvollziehbarkeit der Ergebnisse: die Regeln können der Reihe nach notfalls auch per Hand durchgerechnet werden.

Die Nachteile von Fuzzy-Reglern, gerade gegenüber neuronalen Netzen, ist, daß diese nicht lernfähig sind. Damit ist keine automatische Anpassung an eine sich verändernde Umgebung möglich. Auch können Fehler in der Erstellungsphase später kaum wieder verbessert werden. Unangenehm bei den Defuzzifizierungsmethoden ist, daß es schwierig sein kann, die richtige Methode zu finden. Der Vorteil der Unschärfe wird durch Rückübersetzung in diskreten Wert oft zerstört. Die Berechnung des scharfen Endwertes ist entweder komplex, langsam und gut, oder schnell, dafür aber mit einem schlechteren Ergebnis. Hier gibt es also einen Trade-off zwischen Geschwindigkeit und Ergebnisgüte.

4.3 Kombination von Fuzzy-Reglern und Neuronalen Netzen

Bei dem Entwurf von Fuzzy-Reglern sind insbesondere die Aufstellung der Regelbasis, sowie die geeignete Modellierung der Fuzzy-Mengen problematisch. Durch die Kombination von Fuzzy-Reglern mit neuronalen Netzen können diese Nachteile recht gut kompensiert werden.

Adaptive Fuzzy-Systeme Bei adaptiven Fuzzy-Systemen existieren beide Teile selbstständig: das neuronale Netz und der Fuzzy-Regler. Der Fuzzy-Regler liefert dem neuronalen Netz Beispieldaten zur Verfügung, auf deren Basis das neuronale Netz eine optimierte Regelbasis erstellt, die dann dem Fuzzy-System für die Ausführung des Inferenzmechanismus zurückgegeben wird. Dadurch verlieren die Inferenzregeln ihren starren Charakter, das Fuzzy-System kann sich einer verändernden Umwelt (z.B. Verschleißerscheinungen) anpassen.

Neuro-Fuzzy-Systeme Hier verschmelzen das neuronale Netz und der Fuzzy-Regler zu einem Gesamtsystem. Die Systeme existieren hier nicht mehr selbständig nebeneinander, sondern gehen ineinander über: das Neuronale Netz übernimmt zusätzlich zur Regelbasisoptimierung auch den Inferenzprozeß. Diese Systeme haben den Vorteil, daß die Ein- bzw. Ausgangsdaten in fuzzy-typischer Form wie z.B. sprachliche Ausdrücke vorliegen können, während die Optimierung durch die Anpassungsfähigkeit und die Inferenz von einer neuronalen Struktur vorgenommen wird.

Der zusätzliche Vorteil der adaptiven Fuzzy-Systemen ist, daß diese sich auch in sicherheitskritischen Bereichen einsetzten lassen, da die Regeln sich sowohl kontrollieren, als auch deren maximalen Ausprägungen vorschreiben lassen.

4.4 Fuzzy-Hardware

Fuzzy-Regler lassen sich nur relativ aufwendig durch Software implementieren. Die im Prinzip mögliche Parallelisierung wird dabei nicht ausgenutzt, und die Simulation analoger Werte zwischen 0 und 1 durch Gleitkommazahlen ist aufwendig und zeitintensiv. Dies hat schon relativ früh dazu geführt, daß Fuzzy-Regler direkt in Hardware implementiert wurden. Dies führt zu einer schnelleren Verarbeitungszeit, sowie einer starken Miniaturisierung. Ein Problem der meisten Fuzzy-Hardware-Regler ist die Effizienz der Defuzzifizierung. Die Schwerpunktmethode eignet sich hierfür kaum, da hier keine parallele Abarbeitung möglich ist und die dazu nötigen mathematischen Operationen recht aufwendig sind.

4.5 Fuzzy-Expertensysteme

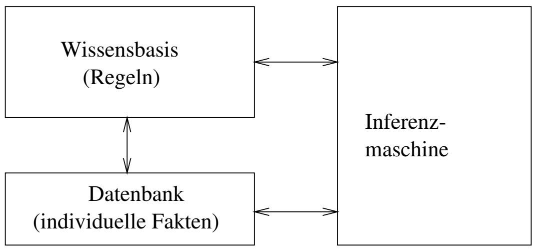

Abbildung 26: Struktureller Aufbau eines Fuzzy-Expertensystems

Fuzzy-Logic eignet sich wegen der guten Verarbeitung von vagen Informationen, wie sie in der Praxis recht häufig vorkommen (Medizin: hohes Fieber, etc.), gut für den Einsatz in Expertensystemen. Der wesentlichste Unterschied zu konventionellen Expertensystemen ist, daß Fuzzy-Expertensysteme keine Entscheidungsbäume durchlaufen, sondern wie bei der Fuzzy-Regelung Regeln partiell aktivieren und sie zu einem Gesamtergebnis verschmelzen. Damit kann auch widersprüchliches Wissen mehrerer Experten genutzt werden, was sonst nicht möglich ist: in konventionellen Systemen müssen die Regeln konsistent sein. Bei Fuzzy-Expertensystemen kann die Anzahl der Regeln, die normalerweise notwendig ist, um ein Wissensgebiet zu beschreiben, deutlich reduziert werden. Es wird von einer Reduktion der nötigen Regeln um den Faktor 100 bis 1000 gesprochen [McNeill 1996, Seite 309]. Damit kann die Entwicklungszeit eines Fuzzy-Expertensystems im Vergleich zu einem herkömmlichen Expertensystem oft wesentlich verkürzt werden. Andere Vorteile sind, daß für die Ermittlung einer Antwort nicht alle Informationen benötigt werden: vorhandene Daten werden ausgewertet und die zutreffensten Ergebnisse zurückgeliefert. Der strukturelle Aufbau eines Fuzzy-Expertensystems ist in Abbildung 26 wiedergegeben.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Fuzzy Logic ist eine interessantes Konzept, Unschärfen verschiedener Art zu verarbeiten. Die Mathematik der Fuzzy Logic stellt dazu die benötigten Hilfsmittel zur Verfügung.

Dieser Text konnte nur ein begrenzten Teil der Fuzzy-Theorie wiedergeben; auch wurde nur eine Beispielanwendung genauer vorgestellt. Trotzdem hofft der Autor, daß die Denkweise der Fuzzy-Logic etwas klarer geworden ist und die Potentiale der Fuzzy Logic erkennbar wurden.

Die erfolgreichste Anwendung der Fuzzy-Logic war bisher die Fuzzy-Regelung, die sich in der Industie für die Regelung komplexer Anlagen als ein hervorragendes Hilfsmittel herausgestellt hat. Der Aufwand, ein komplexes nichtlineares Regelungsproblem zu lösen, kann mit Hilfe der Fuzzy-Regelung üblicherweise deutlich reduziert werden. Geopfert wird dabei nicht die Präzision klassischer mathematischer Modelle an sich, sondern nur die zwecklose Präzision, die oft gar nicht nötig ist. Wenn ein Sensor z.B. von Natur aus ungenau ist, ist es übertrieben, nach exakten Modellen zu suchen. Alle zur Zeit mit Fuzzy-Methoden erzielten Problemlösungen in der Industrie wären wohl auch mit konventionellen mathematischen/informatischen Methoden lösbar. Der Unterschied ist nur, daß Fuzzy-Lösungen oft sehr viel einfacher, kostengünstiger, leichter zu entwickeln und leichter zu implementieren sind. Die Lösungen sind vielleicht nicht perfekt, aber es ist zubedenken, daß die letzten 10% Genauigkeit oft 90% des Aufwands kosten. Damit werden Fuzzy-Systeme wirtschaftlich sinnvoll und vertretbar.

In anderen Bereichen, wie z.B. den Fuzzy-Expertensystemen, ermöglichen Fuzzy-Systeme Lösungen, die sonst wohl nicht möglich wären. Bisher wurde die Fuzzy-Theorie auf recht wenige Systeme angewendet, erfolgreicher Einsatz woanders ist mehr als wahrscheinlich.

Statt die Fuzzy-Theorie als eine Theorie zu verstehen, kann die "Fuzzifizierung" allgemein als eine Methode betrachtet werden, die allgemein eingesetzt werden kann, eine "scharfe" Theorie in eine "fuzzige" Form zu überführen. So gibt es eine Verallgemeinerung der Automatentheorie, die Zusammenhänge gut wiederspiegeln: unscharfe kognitive Abbildungen, fuzzy cognitive maps (FCMs). Auch andere Theorien sind schon fuzzifiziert worden, z.B. die Theorie der Fuzzy-Differentialgleichungen und ähnliche.

Als Resümee kann festgehalten werden, daß die Fuzzy-Logic vielleicht kein Allheilmittel oder Wunderwaffe ist. Es wurden schon viele Anwendungsmöglichkeiten angedacht. Es ist auf Dauer zu hoffen, daß die Fuzzy Logic (vielleicht insbesondere in Kombination mit neuronalen Netzen) zu einer angenehmeren und verständlicheren Schnittstelle zwischen technischen Systemen und Menschen führt.

A Literatur

[Brauer 1995] Wilfried Brauer, Skriptum zur Vorlesung *Fuzzy Logic* im Sommersemester 1995 an der Technischen Universität München, 72 Seiten handschriftliche Folienkopien

[Busch 1995] Peter Busch, *Elementare Regelungstechnik: Allgemeingültige Darstellung ohne höhere Mathematik*, 3. Auflage, Vogel-Verlag, Würzburg, 1995, 290 Seiten, ISBN 3-8023-1567-7
Eine gute Einführung in die Problematik des konventionellen Steuerns und Regelns

[Drösser 1994] Christop Drösser, *Fuzzy-Logic: Methodische Einführung in krauses Denken*, Rowohlt, Reinbek bei Hamburg, 1994, 167 Seiten, ISBN 3-499-19619-0
Eine populärwissenschaftliche Einführung in Fuzzy Logic

[Kahlert 1994] Jörg Kahlert, Hubert Frank, *Fuzzy-Logik und Fuzzy-Control: eine anwendungsorientierte Einführung mit Begleitsoftware*, 2., verb. und erw. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 1994, 353 Seiten, mit Diskette, ISBN 3-528-15304-0
Eine gut verständliche Einführung in Fuzzy-Logik und Fuzzy-Control. Die Software ist für Windows 3.1

[Kantrowitz 1996] Mark Kantrowitz, Erik Horstkotte, Cliff Joslyn, *Answers to Frequently Asked Questions about Fuzzy Logic and Fuzzy Expert Systems*, comp.ai.fuzzy, Februar, 1996,
Quelle: `ftp://ftp.cs.cmu.edu/user/ai/pubs/faqs/fuzzy/fuzzy.faq`,
email: `mkant+fuzzy-faq@cs.cmu.edu`

[Klir 1988] George J. Klir, Tina A. Folger, *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988, 355 Seiten, ISBN 0-13-345984-5
Schon etwas älteres Lehrbuch, aber eine hervorragende Einführung in die verschiedenen Bereiche der Fuzzy Logic. Geht dabei auch genug auf traditionelle Verfahren ein, so daß immer klar wird, was das "Neue" an der Fuzzy Logic ist.

[Kosko 1993] Bart Kosko, *Fuzzy Logisch*, ECON, Düsseldorf, 1995, 352 Seiten, ISBN 3-612-26161-4
Eine populärwissenschaftliche Einführung in Fuzzy-Logik, deutsche Übersetzung der amerikanischen Originalausgabe *Fuzzy Thinking*

[Kruse 1995] Rudolf Kruse, Jörg Gebhardt, Frank Klawonn, *Fuzzy-Systeme*, 2., überarbeitete Auflage, Teubner, Stuttgart, 1995, 273 Seiten, ISBN

3-519-12130-1
Die Mathematik und Semantik der Fuzzy-Systeme wird hier sehr sauber entwickelt und dargestellt. Grundlage für [Kruse 1996]

[Kruse 1996] Rudolf Kruse, *Fuzzy-Systeme - Positive Aspekte der Unvollkommenheit*, in der Zeitschrift *Informatik-Spektrum*, Band 19, Heft 1, Februar 1996, Seiten 4 bis 11
Hervorragender Überblick über Fuzzy-Systeme

[Mayer 1993] Andreas Mayer, Bernhard Mechler, Andreas Schildwein, Rainer Wolke, *Fuzzy Logic: Einführung und Leitfaden zur praktischen Anwendung; Mit Fuzzy-Shell in C++*, Addison-Wesley, Bonn, 1993, 289 Seiten, ISBN 3-89319-443-6

[McNeill 1996] Daniel McNeill, Paul Freiberger, *Fuzzy Logic: Die "unscharfe" Logik erobert die Technik"* Aktualisierte Taschenbuchausgabe September 1996, Droemersche Verlagsanstalt Th. Knaur Nachf., München, 447 Seiten, ISBN 3-426-77202-7
Eine populärwissenschaftliche, aber doch die Grundlagen der Fuzzy Logic beleuchtende Einführung. Besonders gut gelungen ist die Vorstellung der wichtigsten Persönlichkeiten aus dem Bereich der Fuzzy Logic.

[Seraphin 1994] Marco Seraphin, *Neuronale Netze und Fuzzy Logic: Verknüpfung der Verfahren, Anwendungen, Vor- und Nachteile, Simulationsprogramm*, Franzis, München, 1994, 294 Seiten, ISBN 3-7723-6385-7
Eine leicht verständliche, nicht sehr tiefgehende Einführung in neuronale Netze und Fuzzy Logic, wobei der Verknüpfungsaspekt von Neuronalen Netzen und Fuzzy Logic leider etwas kurzgekommen ist.

[Tinnefeld 1994] Marie-Theres Tinnefeld [Hrsg.], *Institutionen und Einzelne im Zeitalter der Informationstechnik: Machtpositionen und Rechte*, Oldenbourg Verlag, München, 1994, ISBN 3-486-22790-4
Besonders interessant sind die Kapitel 19: *Ein bißchen Fuzzy Logic für Juristen* von Lothar Philipps, sowie Kapitel 20: *Moderne Technologien und das Haftungsrisiko des Arbeitnehmers: Ein Fuzzy-Logic-Expertensystem zur Ermittlung des Haftungsanteils* von Klaus Köhler und Judith Laeverenz. Die beiden Kapitel zeigen eine möglichen Anwendung von Fuzzy-Logic in der Rechtsprechung

[Yager 1987] R.R. Yager, S. Ovchinnikov, R.M. Tong, H.T. Nguyen [Ed.], *Fuzzy Sets and Applications: Selected Papers by L.A. Zadeh*, John Wiley & Sons, 1987, ISBN 0-471-85710-6

[Zadeh 1965] L.A. Zadeh, *Fuzzy Sets*, in *Information and Control*, 8, Seiten 338-353, 1965, *nachgedruckt in [Yager 1987, Seite 29-44]*

Der Originalartikel, der die Theorie der Fuzzy-Sets das erste Mal in der heute bekannten Form vorgestellt hat

[Zimmermann 1993] Hans-Jürgen Zimmermann [Hrsg.], Joachim Angstenberger u.a., *Fuzzy Technologien: Prinzipien, Werkzeuge, Potentiale*, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1993, 251 Seiten, ISBN 3-18-401269-7
Dieses Buch vom Fuzzy-Papst in Deutschland ist leider schon etwas alt, trotzdem findet man hier interessante Ansätze und Informationen

B Weitergehende Informationsquellen

B.1 Journale

- IEEE Transactions on Fuzzy Systems:
  `http://engine.ieee.org/nnc/pubs/transactions.html`
- IEEE Transactions on Neural Networks:
  `http://engine.ieee.org/nnc/pubs/transactions.html`
- IEEE Transactions on Signal Processing:
  `http://www.ieee.org/pub_preview/sp_toc.html`
- IEEE Transactions on Image Processing:
  `http://www.ieee.org/pub_preview/ip_toc.html`
- International Journal of Fuzzy Sets and Systems:
  `http://www.elsevier.nl:80/inca/publications/store/5/0/5/5/4/5/`
- International Journal of Approximate Reasoning:
  `http://seraphim.csee.usf.edu/Nafips/ijar.html`
- Neural Computation:
  `http://www-mitpress.mit.edu/jrnls-catalog/neural.html`
- Neurocomputing:
  `http://www.elsevier.nl/locate/neucom`
- Journal of Artificial Intelligence Research:
  `http://www.cs.washington.edu/research/jair/home.html`
- Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems:
  `http://www.wspc.co.uk/wspc/Journals/ijufks/ijufks.html`

B.2 Organisationen

- IFSA - International Fuzzy Systems Association:
  `http://www.abo.fi/~rfuller/ifsa.html` - die weltweite Gesellschaft für Fuzzy-Systeme
- ELITE - European Laboratory for Intelligent Techniques Engineering:
  `http://www.mitgmbh.de/elite/elite.html` - europäische Stiftung in Aachen
- ERUDIT - European Network in Uncertainty Techniques Development for Use in Information Techniques:
  `http://ss-m3.mitgmbh.de/erudit/`
- NAFIPS - North American Fuzzy Information Processing Society:
  `http://seraphim.csee.usf.edu/nafips.html`
- LIFE - Laboratory for International Fuzzy Engineering Research - Japan, wohl die größte Institution im Bereich der Fuzzy Logic
- FLSI - Fuzzy Logic System Institute - Japan
- FLLL - Fuzzy Logic Laboratorium Linz-Hagenberg:
  `http://www.flll.uni-linz.ac.at/tmg/pd.html`
- GMD - Forschungszentrum Informationstechnik:
  `http://borneo.gmd.de/EIA/fuzzy.html`
- CFL - Center for Fuzzy Logic and Intelligent Systems Research - Fuzzy Logic Research Center in Texas A&M University:
  `http://www.cs.tamu.edu/research/CFL/`
- Fachgruppe "Fuzzy Systeme" der Gesellschaft für Informatik:
  `http://www.cs.tu-bs.de/ibr/fuzzy/gi124_d.html`
- AFN - Arbeitsgemeinschaft für Fuzzy-Logik und Soft Computing in Norddeutschland:
  `http://www.cs.tu-bs.de/ibr/afn/welcome.html`

B.3 Newsgruppen

- `comp.ai.fuzzy`
  (FAQ: `http://www.cs.cmu.edu/Web/Groups/AI/html/faqs/ai/fuzzy/part1/faq.html`)
- `comp.ai.neural-nets`
  (FAQ: `http://www.cs.cmu.edu/Web/Groups/AI/html/faqs/ai/neural/faq.html`)
- `comp.ai.genetic`
  (FAQ: `http://www.cs.cmu.edu/Web/Groups/AI/html/faqs/ai/genetic/top.html`)
- `comp.soft-sys.matlab`

B.4 Ausgewählte WWW-Links

- Quadralay's Fuzzy Logic Archive:
  `http://www.austinlinks.com/Fuzzy/`
- Fuzzy Logic and Neurofuzzy resources:
  `http://www-isis.ecs.soton.ac.uk/research/nfinfo/fuzzy.html`
- Fuzzy Sets and Systems:
  `http://www.abo.fi/~rfuller/fuzs.html`
- Internet's Resources for Neuro-Fuzzy and Soft Computing:
  `http://www.cs.nthu.edu.tw/~jang/nfsc.htm`
- Fuzzy Logic in Yahoo:
  `http://www.yahoo.com/Science/Computer_Science/Artificial_Intelligence/Fuzzy_Logic/`
- Fuzzy-Logik in Stöcker DeskTop Mathematik (multimediale Umsetzung des Werkes "Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren"):
  `http://www.uni-online.de/hades/mathe/part-9/node125.htm`
- PC AI - Fuzzy Logic:
  `http://www.pcai.com/pcai/New_Home_Page/ai_info/fuzzy_logic.html`

B.5 Who is Who - Bekannte Personen im Fuzzy-Logic Bereich

Liste im Bereich Fuzzy Logic aktiver Wissenschaftler:
`ftp://ftp.dbai.tuwien.ac.at/pub/mlowner/whoiswhoinfuzzy` oder
`ftp://ftp.abo.fi/pub/iamsr/who.txt`

B.5.1 International

- Prof. Lotfi A. Zadeh - Der Vater der Fuzzy Logic, emeritierter Professor an der University of California at Berkeley
- Dr. Bart Kosko - Associate Professor and Director at The University of Southern California
- E.H. Mamdani - Pionier auf dem Gebiet der Fuzzy-Regelungstechnik
- Dr. Masaki Togai † - Gründer von Togai InfraLogic, Inc.
- Dr. John Yen - Associate Professor and Director of CFL at Texas A&M University
- Dr. Ronald R. Yager - Director of the Machine Intelligence Institute at Iona College
- Prof. Michio Sugeno - Institute for Technology in Tokio

B.5.2 Deutschland

- Prof. Hans-Jürgen Zimmermann, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule (RWTH) Aachen
- Prof. Rudolf Kruse Technische Universität Braunschweig
- C. von Altrock, INFORM GmbH, Aachen

C Mathematische Grundlagen

C.1 Verband

Eine nichtleere Menge V heißt *Verband* $(V, +, \cdot)$ (engl. lattice), wenn auf V zwei Verknüpfungen (statt $+$ und $\cdot$ oft auch $\cup$ und $\cap$, $\vee$ und $\wedge$, manchmal auch $\sqcup$ und $\sqcap$ geschrieben) definiert sind, so daß für alle $a, b, c \in V$ folgende Axiome gelten:

(1) Axiome der Kommutativität
$a \cdot b = b \cdot a$ $\qquad$ a + b = b + a

(2) Axiome der Assoziativität
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $\qquad$ $(a+b)+c = a+(b+c)$

(3) Axiome der Absorption (Verschmelzung)
$a \cdot (a + b) = a$ $\qquad$ $a + (a \cdot b) = a$

Ein Verband heißt *distributiv*, wenn für alle $a, b, c \in V$ ferner gelten:

(4) Axiome der Distributivität
$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ $\qquad$ $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

Ein distributiver Verband heißt *komplementär*, wenn er zwei Elemente n und e (oft als 0 und 1, `true` und `false`, bzw. $\emptyset$ und Grundmenge G bezeichnet) enthält, für die gelten:

(5) Axiome der neutralen Elemente
Für alle $a \in V$ gilt:
$a \cdot e = a$ $\qquad$ $a + n = a$

(6) Axiom der Existenz des komplementären Elements
Zu jedem $a \in V$ gibt es ein komplementäres $\overline{a} \in V$, so daß:
$a \cdot \overline{a} = n$ $\qquad$ $a + \overline{a} = e$

Ein distributiver komplementärer Verband heißt *Boolescher Verband* oder *Boolesche Algebra*. Als Komplementzeichen dienen neben $^{-}$ auch $c(\cdot)$, ein kleines hochgestelltes ^{c} oder $\neg(\cdot)$.

Folgende *Gesetze* gelten in einem Booleschen Verband:

- Doppeltes Komplement
  $\overline{(\overline{a})} = a$

- Idempotenzgesetze
  $a \cdot a = a$ $\qquad$ $a + a = a$

- De Morgan-Gesetze
  $a \cdot b = \overline{a} + \overline{b}$ $\qquad$ $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$

- Dominanzgesetze
  $a \cdot n = 0$ $\quad$ $a + e = e$

- n- und e-Komplemente
  $\overline{n} = e$ $\quad$ $\overline{e} = n$

Dualitätsprinzip: Vertauscht man in einem Gesetz der Booleschen Algebra/Verbände die Verknüpfungen $\cdot$ und $+$ sowie gleichzeitig n und e miteinander, so ergibt sich wieder ein Gesetz der Booleschen Algebra/Verbände.

Satz von Stone: Jeder Boolesche Verband $(V, \cdot, +)$ mit endlich vielen Elementen ist isomorph einem Mengenverband $(P(E), \cap, \cup)$.

Die Anzahl der Elemente eines endlichen Booleschen Verbands ist 2^n mit $n \in \mathbb{N}$

Beispiel: Verknüpfungstafeln des vierelementigen Booleschen Verbands mit der Trägermenge $V = (0, p, q, 1)$

$\cdot$	0	p	q	1
0	0	0	0	0
p	0	p	0	p
q	0	0	q	q
1	0	p	q	1

$+$	0	p	q	1
0	0	p	q	1
p	p	p	1	1
q	q	1	q	1
1	1	1	1	1

Tabelle 2: Beispiel für einen 4-elementigen Booleschen Verband

C.2 t-Norm, t-Conorm

Eine t-Norm (von engl. triangular, Dreiecks-) ist eine Funktion $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, die folgenden Bedingungen genügt:

(1) Monotonie:
$a \leq b$ und $c \leq d \Rightarrow T(a,c) \leq T(b,d)$

(2) Kommutativität:
$T(a,b) = T(b,a)$

(3) Assoziativität:
$T(a, T(b,c)) = T(T(a,b), c)$

(4) Einselement:
$T(a,1) = a$

Eine t-Conorm muß wie eine t-Norm ebenfalls die Eigenschaften (1), (2) und (3) erfüllen, anstelle von (4) wird jedoch $T(a,0) = a$ gefordert. Wird $\overline{a} = 1 - a$ als Negation verwendet, induziert jede t-Norm T eine t-Conorm T^c mittels $T^c(a,b) = 1 - T(1-a, 1-b)$